מועד א', סמסטר חורף תשפ"א - אלגברה 1/מ, 104016

10.2.21

חלק ב'

פתרונות – שימו לב שהיו גרסאות שונות

ת"ז :

פקולטה :

- משך המבחן : 75 דקות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- **בשאלה 7 יש לנמק** היטב את התשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב.**

בשאלות 8-12 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שתעתיקו לדפים שלכם. **זה במודל**

ב ה צ ל ח ה !

<u>שאלה מס' 7</u> : (20 נקודות)

הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית :

א. אם $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ומקיימות $A^2=AB$ וגם $B^2=I+AB$ אז $A=0$.

ב. יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה F, ויהיו $U,W\subset V$ שני תת מרחבים של V.
נתון כי $dimU=2$, $dimV=6$ וגם $V=U\oplus W$. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי.
אם לכל $u\in U$ מתקיים $T(u)\in W$ וגם לכל $w\in W$ מתקיים $T(w)\in U$ אז לכל
מטריצה מייצגת A של T מתקיים $trace(A)=0$.

<u>פתרון שאלה מס' 7</u> :

א. הטענה נכונה : מהנתון $B^2=I+AB$ נקבל ע"י העברת אגפים $B^2-AB=I$ לכן $(B-A)B=I$
כלומר B הפיכה וגם $B-A$ הפיכה.
מהנתון $A^2=AB$ נקבל ע"י העברת אגפים $AB-A^2=0$ לכן $A(B-A)=0$ אבל $B-A$ הפיכה
לכן נכפול בהופכית של מצד ימין ונקבל $A=0$.

ב. הטענה נכונה : נבנה מטריצה מייצגת לפי הבסיס הבא :
מהנתון $V=U\oplus W$ נובע שאיחוד הבסיסים של U ו W הוא בסיס ל V. נסמן :
$\dim W=4$, $\dim U=2$, $\dim n$, וניקח , $B_W=\{w_3,...,w_6\}$, $B_U=\{u_1,u_2\}$ בסיסים ל U ול W,
אז כאמור איחוד הבסיסים בסיס של V כלומר : $B_U\cup B_W=B_V=\{u_1,u_2,w_3,...,w_6\}$. נבנה מטריצה
מייצגת לפי הבסיס B_V הנ"ל ונזכור את הנתון הנוסף : לכל $u\in U$ מתקיים
$T(u)\in W$ וגם לכל $w\in W$ מתקיים $T(w)\in U$. נקבל כי $T(u_j)$ הוא ב W ולכן צרוף ליניארי
של האיברים ב B_W וכן $T(u_j)$ הוא ב U ולכן צרוף ליניארי של האיברים ב B_U :

$$
\begin{aligned}
T(u_1) &= 0u_1 + 0u_2 + a_{1,3}w_3 + \ldots + a_{1,6}w_6 \\
T(u_2) &= 0u_1 + 0u_2 + a_{2,3}w_3 + \ldots + a_{2,6}w_6 \\
T(w_3) &= a_{3,1}u_1 + a_{3,2}u_2 + 0w_3 + \ldots + 0w_6 \\
&\vdots \\
T(w_6) &= a_{6,1}u_1 + a_{6,2}u_2 + 0w_3 + \ldots + 0w_6
\end{aligned}
$$

$$
[T]_{B_V} = A = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{k} \quad \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{n-k} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} & a_{6,1} \\ 0 & 0 & a_{3,2} & a_{6,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & 0 & 0 \\ a_{1,6} & a_{2,6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \quad trace(A) = 0
$$

קיבלנו כי המטריצה המייצגת ביחס לבסיס זה היא בעלת עיקבה 0 (כל איברי האלכסון הם 0). מאחר וכל המטריצות המייצגות הן דומות ויש להן את אותה עיקבה הרי שלכולן תהייה עיקבה 0.

<u>שאלה מס' 8</u> : (6 נקודות)

תהי $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, אזי $\left(A^{2021}\right)_{1,3}$ (כלומר האיבר במקום ה 1,3 במטריצה A^{2021}) שווה ל:

א. 0 ; ב. 1 ; ג. 2 ; ד. 3 ; ה. -1.

<u>פתרון שאלה מס' 8</u> :

המטריצה A לכסינה כי היא משולשת עליונה לכן איברי האלכסון שלה הם הע"ע שלה. יש לה 3 ע"ע שונים ולכן היא לכסינה וגומה למטריצה האלכסונית:

$$
D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{2021} = \begin{pmatrix} (-1)^{2021} & 0 & 0 \\ 0 & 0^{2021} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{2021} \end{pmatrix} = D
$$

מהדמיון נובע שקיימת P הפיכה כך ש $A = PDP^{-1}$ ולכן:

$A^{2021} = \left(PDP^{-1}\right)^{2021} = PDP^{-1}PDP^{-1}\ldots PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^{2021}P^{-1} = PDP^{-1} = A$ לכן

$\left(A^{2021}\right)_{1,3} = (A)_{1,3} = 2$

אפשר גם ע"י חישוב ישיר לקבל כי $A^3 = A$ ולכן ינבע בסופו של דבר כי $A^{2021} = A^{3\cdot 673+2} = A\cdot A^2 = A^3 = A$

סימון נכון ג'

<u>שאלה מס' 9</u> : (6 נקודות)

תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית ויהי : $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$ בסיס של V. אזי :

א. אם $\{T(v_1),T(v_2),T(v_3),T(v_4)\}$ בסיס של ImT אז $\{v_5,v_6,v_7\}$ בסיס של $KerT$.

ב. אם הקבוצה $\{v_1-3v_2-v_3\ ,\ -2v_1+13v_2-4v_3\ ,\ 4v_1-5v_2-10v_3\}$ פורשת את $KerT$ אז $dimImT=4$.

ג. אם $\{v_1,v_2\}$ פורשים את $KerT$ אז $\{T(v_3),T(v_4),T(v_5),T(v_6),T(v_7)\}$ בסיס של ImT .

ד. אם $\{T(v_1),T(v_2),T(v_3)\}$ פורשים את ImT אז $dimKerT=4$.

ה. אם T חד-חד-ערכית אז T על.

<u>פתרון שאלה מס' 9</u> :

א לא נכון כי הנל לא חייבים ללכת ל- 0 הם יכולים להיות צרוף ליניארי של איברי התמונה אבל לאו דווקא 0 כדי להיות בסיס לגרעין.

ב לא נכון. הקבוצה הנתונה תלויה ליניארית (בדקו) ולכן מימד הגרעין יוצא רק 2 ולכן מימד התמונה 5 ולא 4.

ג נכון כי אם השניים פורשים את הגרעין הם חלק מבסיס ולכן גם בלתי תלוים ליניארית. לכן מימד הגרעין הוא 2 ומימד התמונה 7. 5 התמונות הנ"ל פורשות את התמונה (לפי משפט כי $T(v_1)=T(v_2)=0$ לא משפיעים על הפרישה. מימד התמונה 5 לכן כל 5 בת"ל הם בסיס ולכן הם אכן בסיס לתמונה.

ד לא נכון כי נתון שהם פורשים את הצמונה. יתכן והם תלויים ליניארית ואז מימד הגרעין יצא יותר מ 4.

ה לא נכון כי לא נתון שהמימד של W שווה למימד של V לכן חח"ע לא בהכרח יגרור על.

סימון נכון ג'

<u>שאלה מס' 10</u> : (6 נקודות)

נתונים שני בסיסים של $\mathbb{R}^3$:

$$E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ ,\ B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

תהי Q מטריצת המעבר מהבסיס B לבסיס E . אז סכום כל האיברים במטריצה Q הוא :

ב. 3 ; ב. 9 ; ג. 1 ; ד. $\frac{1}{3}$; ה. $\frac{1}{9}$.

<u>פתרון שאלה מס' 10</u> :

כידוע מטריצת המעבר P מהבסיס הסטנדרטי E לבסיס אחר B היא : $P=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}$.

סכום האיברים בכל שורה של P הוא 3. לכן סכום האיברים בכל שורה של $Q=P^{-1}$ (שזו מטריצת המעבר מ B ל E) הוא $\frac{1}{3}$ ולכן סכום האיברים בכל המטריצה הוא $3\cdot\frac{1}{3}=1$.

סימון נכון ג'.

<u>שאלה מס' 11</u> : (6 נקודות)

תהי $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\3&6&4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$. אזי:

א. A לא לכסינה.

ב. ל- A יש 3 ערכים עצמיים שונים.

ג. המטריצות A וגם $A-A^{-1}$ הפיכות.

ד. סכום כל הערכים העצמיים של $A^2-3A-5I$ הוא 9.

ה. המטריצה A הפיכה ומתקיים $trace(A^{-1})=\frac{1}{9}$.

<u>פתרון שאלה מס' 11</u> :

נחשב פולינום אופייני ל $k=3$

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-3&-6&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\0&\lambda-3&-1\\-\lambda+1&-6&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\0&\lambda-3&-1\\0&-8&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-8&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\big((\lambda-3)(\lambda-5)-8\big)=(\lambda-1)\left(\lambda^2-8\lambda+7\right)=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-7)=(\lambda-1)^2(\lambda-7)$$

א לא נכון כי ריבוי גיאומטרי של 1 הוא 2 ולכן לכל ע"ע ריבוי אלגברי שווה ריבוי גיאומטרי:

$$n-r(1\cdot I-A)=3-r\begin{pmatrix}1-2&-2&-1\\-1&1-3&-1\\-3&-6&1-4\end{pmatrix}=3-r\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\-1&-2&-1\\-3&-6&-3\end{pmatrix}=3-1=2$$

ב לא נכון כי ל- A יש ע"ע מריבוי אלגברי 2

ג לא נכון כי הע"ע של $A-A^{-1}$ הם: $7-\frac{1}{7}=6\frac{1}{7}$, $1-\frac{1}{1}=0$. 0 הוא ע"ע לכן לא הפיכה.

ד נכון כי ע"ע של $A^2-3A-5I$ הם: $1^2-3\cdot1-5=-7$ פעמיים ו $7^2-3\cdot7-5=23$ ולכן סכום כל הע"ע הוא: $-7-7+23=9$

ה לא נכון כי הע"ע של A^{-1} הם $1^{-1},1^{-1},7^{-1}$ ולכן $trace\left(A^{-1}\right)=1+1+\frac{1}{7}=2\frac{1}{7}\neq\frac{1}{9}$.

סימון נכון ד'.

<u>שאלה מס' 12</u> : (6 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. אזי:

א. אם A דומה ל- B אז A^3-5A^2+3I דומה ל B^3-5B^2+3I .

ב. אם A לא הפיכה אז A לא לכסינה.

ג. אם B ממשית ושקולת שורה ל- A ו- A לכסינה אז B לכסינה.

ד. אם A משולשת עליונה אז A לכסינה.

ה. אם מרחב השורות של A שווה למרחב העמודות של A אז A לכסינה.

<u>פתרון שאלה מס׳ 12</u> :

א נכון. הוכחה : מהנתון קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = B$ ולכן

$$B^3 - 5B^2 + 3I = (P^{-1}AP)^3 - 5(P^{-1}AP)^2 + 3(P^{-1}P) = (P^{-1}A^3P) - 5(P^{-1}A^2P) + 3(P^{-1}P) = P^{-1}(A^3 - 5A^2 + 3I)P$$

ב לא נכון למשל מטריצת 0 ריבועית לא הפיכה וכן לכסינה (כי אלכסונית)

ג לא נכון כי למשל נבחר $A = I$ לכסינה (כי אלכסונית) ו- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ שקולת שורות ל- A (כי היא הפיכה)

אבל B לא לכסינה כי 1 הוא ע״ע מריבוי אלגברי 2 וריבוי גיאומטרי 1.

ד לא נכון למשל B מסעיף ג׳ משולשת עליונה ולא לכסינה

ה לא נכון. אותה דוגמא מסעיף ג׳, כי המטריצה הפיכה לכן מרחב השורות של B שווה למרחב העמודות של B שווה ל $\mathbb{R}^2$ אבל Bלא לכסינה.

סימון נכון א׳